Cálculo 3A – EP9 – Integral de linha de campo vetorial. Campos conservativos.

Exercício 1: Calcule a integral de linha $I = \int_C y\,dx + (x+2y)\,dy$ de $(1,0)$ a $(0,1)$, onde C é:

a) o segmento de reta;

b) o arco de circunferência $x = \cos t$ e $y = \operatorname{sen} t$;

c) a poligonal de $(1,0)$ a $(1,1)$ a $(0,1)$.

Exercício 2: Calcule os valores de $I = \int_C -2xy\,dx + \left(x^2+y^2\right)\,dy$ ao longo dos caminhos C

a) a parte superior da circunferência $x^2+y^2=a^2$ de $(a,0)$ a $(-a,0)$;

b) a parte superior da elipse $x^2+4y^2=2x$, orientada no sentido anti-horário.

Exercício 3: Calcule o trabalho realizado pela força $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$ para deslocar uma partícula em linha reta do ponto $A(1,2)$ até $B(3,4)$.

Exercício 4: Determine o trabalho realizado pela força $\vec{F}(x,y,z) = \left(y, x, z^2\right)$ para deslocar uma partícula ao longo da hélice C dada por $\gamma(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t, 2t)$, do ponto $A(2,0,0)$ ao ponto $B(2,0,4\pi)$.

Exercício 5: Calcule a integral do campo vetorial $\vec{F} = \left(2xy, x^2, 3z\right)$ do ponto $A(0,0,0)$ ao ponto $B(1,1,2)$ ao longo da curva C interseção das superfícies $z = x^2+y^2$ e $x = y$.

Exercício 6: Calcule a integral do campo vetorial $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ ao longo da curva C interseção das superfícies $x^2+y^2-2y=0$ e $z=y$ orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.

Exercício 7: Sabe-se que o campo $\vec{F} = (e^{x+y}+1)\,\vec{\mathbf{i}} + e^{x+y}\vec{\mathbf{j}}$ é um campo conservativo em $\mathbb{R}^2$.

a) Encontre uma função potencial para $\vec{F}$.

b) Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ onde C é o arco de circunferência $(x-1)^2+(y-1/2)^2 = 1/4$, com $x \geq 1$ que vai de $(1,0)$ a $(1,1)$.

Exercício 8: Determine uma função potencial para cada campo conservativo.

a) $\vec{F}(x,y) = \left(x^2+y^2\right)\vec{\mathbf{i}} + 2xy\,\vec{\mathbf{j}}$.

b) $\vec{F}(x,y) = (\cos(xy) - xy\operatorname{sen}(xy))\,\vec{\mathbf{i}} - \left(x^2\operatorname{sen}(xy)\right)\vec{\mathbf{j}}$.

c) $\vec{F}(x,y,z) = \left(6xy^3+2z^2, 9x^2y^2, 4xz+1\right)$.

Respostas

Exercício 1: (a) $I = 1$; (b) $I = 1$; (c) $I = 1$.

Exercício 2: (a) $I = 0$; (b) $I = \pi$.

Exercício 3: $W = \ln 6 \ u.w.$.

Exercício 4: $W = \frac{64\pi^3}{3} \ u.w.$.

Exercício 5: 7.

Exercício 6: 0.

Exercício 7: (a) $\varphi(x,y) = e^{x+y} + x + c$, onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária; (b) $e^2 - e$.

Exercício 8: (a) $\varphi(x,y) = \frac{x^3}{3} + xy^2 + c$; (b) $\varphi(x,y) = x\cos(xy) + c$; (c) $\varphi(x,y,z) = 3x^2y^3 + 2xz^2 + z + c$; nos três itens $c \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.